Devoir à la maison
corrigé

Méthode simplexe

Exercice 1

A) Résoudre avec la méthode du simplexe primal le problème suivant :

$$(P_1)\begin{cases} Max \quad z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ s.c. \quad -x_1 + 2x_2 + x_3 \le 6 \\ \quad x_1 + x_2 \le 24 \\ \quad x_1 - x_2 + x_3 \le 9 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

<u>Réponse :</u>

#1	x1	x2	x3	e1	e2	e3	b		
e1	-1	2	1	1	0	0	6	6	L1
e2	1	1	0	0	1	0	24	-	L2
e3	1	-1	1	0	0	1	9	9	L3
z	-2	-1	-3	0	0	0	0		Lz

x3 entre et e1 sort ⇒ Li*=L1← L1 / 1. Ensuite,
L2← L2 - 0 × L1, L3← L3 - 1 × L1, Lz← Lz + 3 × L1

#2	x1	x2	x3	e1	e2	e3	b	
x3	**-1**	**2**	**1**	**1**	**0**	**0**	**6**	-
e2	1	1	**0**	0	1	0	24	24
e3	2	-3	**0**	-1	0	1	3	3/2
z	-5	5	**0**	3	0	0	18	

x1 entre et e3 sort ⇒ Li*=L3← L3 / 2. Ensuite,
L1← L1 + 1 × L3, L2← L2 - 1 × L3, Lz← Lz + 5 × L1

#3	x1	x2	x3	e1	e2	e3	b	
x3	**0**	1/2	1	1/2	0	½	15/2	15
e2	**0**	5/2	0	1/2	1	- ½	45/2	9
x1	**1**	**-3/2**	**0**	**- 1/2**	**0**	**½**	**3/2**	-
z	**0**	-5/2	0	1/2	0	5/2	51/2	

x2 entre et e2 sort ⇒ Li*=L2← L2 × 2/5. Ensuite,
L1← L1 – 1/2 × L2, L3← L3 + 3/2 × L2, Lz← Lz + 5/2 × L2

#4	x1	x2	x3	e1	e2	e3	b	
x3	0	**0**	1	2/5	- 1/5	3/5	3	
x2	**0**	**1**	**0**	**1/5**	**2/5**	**- 1/5**	**9**	
x1	1	**0**	0	- 1/5	3/5	1/5	15	
z	0	**0**	0	1	1	2	48	

Solution de Base Réalisable (SBR) optimale (ligne z ≥ 0)

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 15 \end{bmatrix}, \quad x_L = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad et \quad z^* = 48$$

Remarque 1 : les commentaires entre les tableaux sont facultatifs si l'étudiant peut garantir un calcul sans fautes. Dans le cas contraire, un minimum de commentaires permet de montrer une bonne compréhension de la méthode.

Remarque 2 : l'étudiant peut vérifier l'exactitude de son calcul en recalculant z* en revenant à son expression : $z^* = 2x_1^* + x_2^* + 3x_3^* = 2\times 15 + 9 + 3\times 3 = 48$ (ok)

B) Résoudre avec les méthodes du simplexe en deux phases et du simplexe dual le problème suivant :

$$(P_2)\begin{cases} Max \quad z = 2x_1 - x_2 + x_3 \\ s.c. \quad -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 10 \\ \quad x_1 - 4x_3 \le -2 \quad (\Leftrightarrow -x_1 + 4x_3 \ge 2) \\ \quad x_1 - x_2 + 2x_3 \le 4 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Méthode 1 :

Simplexe dual									
#1	x1	x2	x3	e1	e2	e3	b		
e1	-1	2	2	1	0	0	10		L1
e2	1	0	-4	0	1	0	-2		L2
e3	1	-1	2	0	0	1	4		L3
z	-2	1	-1	0	0	0	0		Lz
Lz/Li*	-	-	1/4	-	-	-			

e2 sort et x3 entre ⇒ Li*=L2← L2 / -4. Ensuite,
L1← L1 - 2 × L2, L1← L1 - 2 × L2, Lz← Lz + L2

#2	x1	x2	x3	e1	e2	e3	b	
e1	- 1/2	2	**0**	1	1/2	0	9	-
x3	**- 1/4**	**0**	**1**	**0**	**- 1/4**	**0**	**1/2**	-
e3	3/2	-1	**0**	0	1/2	1	3	2
z	-9/4	1	**0**	0	- 1/4	0	1/2	

Vecteur b positif ⇒ On revient au simplexe primal

x1 entre et e3 sort ⇒ Li*=L3← L3 × 2/3. Ensuite,

L1← L1 +1/2 × L3, L2← L2 + 1/4 × L3, Lz← Lz + 9/4 × L3

#3	x1	x2	x3	e1	e2	e3	b	
e1	**0**	5/3	0	1	2/3	1/3	10	6
x3	**0**	- 1/6	1	0	- 1/6	1/6	1	-
x1	**1**	**- 2/3**	**0**	**0**	**1/3**	**2/3**	**2**	-
z	**0**	- 1/2	0	0	1/2	3/2	5	

x2 entre et e1 sort ⇒ Li*=L1← L1 × 3/5. Ensuite,

L2← L2 +1/6 × L1, L3← L3 + 2/3 × L1, Lz← Lz + 1/2 × L1

#4	x1	x2	x3	e1	e2	e3	b	
x2	**0**	**1**	**0**	**3/5**	**2/5**	**1/5**	**6**	
x3	0	**0**	1	1/10	-1/10	1/5	2	
x1	1	**0**	0	2/5	3/5	4/5	6	
z	0	**0**	0	2/7	2/3	8/5	8	

Méthode 2 :

Méthode du simplexe en 2 phases

phase 1

#1	x1	x2	x3	e1	e2	e3	a1	b	
e1	-1	2	2	1	0	0	0	10	5
a1	-1	0	4	0	-1	0	1	2	0,5
e3	1	-1	2	0	0	1	0	4	2
z'	0	0	0	0	0	0	1	0	
z'	1	0	-4	0	1	0	0	-2	

Rq (correction du tableau): la ligne z' a été recalculée selon la formule Lz'← Lz' - L2 (qui est une transformation linéaire sans aucun impact dur la définition du problème) pour que la variable de base a1 admette une colonne valide (un seul « 1 » et des « 0 » partout). L'ancienne ligne z' peut être barrée.

x3 entre et a1 sort ⇒ Li*=L2← L2 /4. Ensuite,

L1← L1 -2 × L2, L3← L3 -2 × L2, Lz'← Lz' +4 × L2 (calcul de z' facultatif si aucune variables artificielles dans la base: des 0 partout)

#2	x1	x2	x3	e1	e2	e3	a1	b	
e1	- 1/2	2	**0**	1	1/2	0	-	9	-
x3	**- 1/4**	**0**	**1**	**0**	**- 1/4**	**0**	**-**	**1/2**	-
e3	3/2	-1	**0**	0	1/2	1	-	3	2
z'	0	0	**0**	0	0	0	-	0	

phase 2

#3	x1	x2	x3	e1	e2	e3	b	
e1	- 1/2	2	0	1	1/2	0	9	-
x3	- 1/4	0	1	0	- 1/4	0	1/2	-
e3	3/2	-1	0	0	1/2	1	3	2
z	-2	1	-1	0	0	0	0	
z	-9/4	1	0	0	- 1/4	0	1/2	

Rq (correction du tableau): la ligne z a été recalculée selon la formule Lz← Lz' + L2 pour que la variable de base x3 admette une colonne valide. L'ancienne ligne z peut être barrée.

x1 entre et e3 sort ⇒ Li*=L3← L3 × 2/3. Ensuite,

L1← L1 +1/2 × L3, L2← L2 +1/4 × L3, Lz'← Lz' +9/4 × L3

#4	x1	x2	x3	e1	e2	e3	b	
e1	**0**	5/3	0	1	2/3	1/3	10	6
x3	**0**	- 1/6	1	0	- 1/6	1/6	1	-
x1	**1**	**- 2/3**	**0**	**0**	**1/3**	**2/3**	**2**	-
z	**0**	- 1/2	0	0	1/2	3/2	5	

x2 entre et e1 sort ⇒ Li*=L1← L1 × 3/5. Ensuite,

L2← L2 +1/6 × L1, L3← L3 +2/3 × L1, Lz'← Lz' +1/2 × L1

#5	x1	x2	x3	e1	e2	e3	b	
x2	**0**	**1**	**0**	**3/5**	**2/5**	**1/5**	**6**	
x3	0	**0**	1	1/10	-1/10	1/5	2	
x1	1	**0**	0	2/5	3/5	4/5	6	
z	0	**0**	0	2/7	2/3	8/5	8	

SBR optimale (ligne z ≥ 0)

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad x_L = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad et \quad z^* = 8$$

Exercice 2

Résoudre avec la méthode du simplexe en deux phases le problème suivant :

$$(P_1)\begin{cases} Max \quad z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ s.c. \quad -x_1 + 2x_2 + x_3 \le 6 \\ \quad x_3 \ge 3 \\ \quad x_1 - x_2 + 2x_3 \le 12 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

<u>Réponse (les tableaux):</u>

phase 1

	x1	x2	x3	e1	e2	e3	a1	b	
e1	-1	2	1	1	0	0	0	6	6
a1	0	0	1	0	-1	0	1	3	3
e3	1	-1	2	0	0	1	0	12	6
z'	0	0	0	0	0	0	1	0	
z'	0	0	-1	0	1	0	0	-3	

	x1	x2	x3	e1	e2	e3	b	
e1	-1	2	**0**	1	1	0	3	3
x3	**0**	**0**	**1**	**0**	**-1**	**0**	**3**	
e3	1	-1	**0**	0	2	1	6	3
z'	0	0	**0**	0	0	0	0	

phase 2

	x1	x2	x3	e1	e2	e3	b	
e1	-1	2	0	1	1	0	3	3
x3	0	0	1	0	-1	0	3	
e3	1	-1	0	0	2	1	6	3
z	-2	-1	-3	0	0	0	0	
z	-2	-1	0	0	-3	0	9	

	x1	x2	x3	e1	e2	e3	b	
e2	**-1**	**2**	**0**	**1**	**1**	**0**	**3**	
x3	-1	2	1	1	**0**	0	6	
e3	3	-5	0	-2	**0**	1	0	0
z	-5	5	0	3	**0**	0	18	

	x1	x2	x3	e1	e2	e3	b	
e2	**0**	1/3	0	1/3	1	1/3	3	9
x3	**0**	1/3	1	1/3	0	1/3	6	18
x1	**1**	**-5/3**	**0**	**- 2/3**	**0**	**1/3**	**0**	
z	**0**	-10/3	0	- 1/3	0	5/3	18	

	x1	x2	x3	e1	e2	e3	b	
x2	**0**	**1**	**0**	**1**	**3**	**1**	**9**	
x3	0	**0**	1	0	-1	0	3	
x1	1	**0**	0	1	5	2	15	
z	0	**0**	0	3	10	5	48	

Exercice 3

Résoudre le problème suivant :

$$(P)\begin{cases} Max \quad z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ s.c. \\ \quad x_1 + x_2 + 2x_3 \le 4 \\ \quad 2x_1 + 3x_2 \le 7 \\ \quad 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 7 \\ \quad\quad x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Réponse :

#1	x1	x2	x3	e1	e2	e3	b	
e1	1	1	2	1	0	0	4	2
e2	2	3	0	0	1	0	7	
e3	2	1	3	0	0	1	7	7/3
z	-3	-2	-4	0	0	0	0	

x3 entre et e1 sort ⇒ Li*=L1← L1 /2. Ensuite,
L2← L2 -0 × L1, L3← L3 -3 × L1, Lz← Lz +4 × L1

#2	x1	x2	x3	e1	E2	e3	b	
x3	**1/2**	**1/2**	**1**	**½**	**0**	**0**	**2**	4
e2	2	3	**0**	0	1	0	7	7/2
e3	1/2	- 1/2	**0**	-3/2	0	1	1	2
z	-1	0	**0**	2	0	0	8	

x1 entre et e3 sort ⇒ Li*=L3← L3 ×2. Ensuite,
L1← L1 -1/2 × L3, L2← L2 -2 × L3, Lz← Lz + L3

#3	x1	x2	x3	e1	E2	e3	b	
x3	**0**	1	1	2	0	-1	1	1
e2	**0**	5	0	6	1	-4	3	3/5
x1	**1**	**-1**	**0**	**-3**	**0**	**2**	**2**	
z	**0**	-1	0	-1	0	2	10	

x2 entre et e2 sort ⇒ Li*=L2← L2 /5. Ensuite,
L1← L1 -1× L2 L3← L3 –(-1) × L2, Lz← Lz + L2

#4	x1	x2	x3	e1	e2	e3	b	
x3	0	**0**	1	4/5	- 1/5	- 1/5	2/5	
x2	**0**	**1**	**0**	**6/5**	**1/5**	**- 4/5**	**3/5**	
x1	1	**0**	0	-9/5	1/5	6/5	13/5	
z	0	**0**	0	1/5	1/5	6/5	63/5	

SBR optimale (ligne z positive ou nulle)

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 \\ 3/5 \\ 13/5 \end{bmatrix}, \quad x_L = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad et \quad z^* = 53/5 = 10{,}6$$

Exercice 4

Résoudre le problème suivant :

$$(P)\begin{cases} Max \quad z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ s.c. \\ \quad -x_1 + 2x_2 + x_3 \le 6 \\ \quad x_1 + x_2 \le 24 \\ \quad x_1 - x_2 + 2x_3 \le 12 \\ \qquad x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Réponse (tableaux) :

	x1	**x2**	**x3**	**e1**	**e2**	**e3**	**b**	
e1	-1	2	1	1	0	0	6	6
e2	1	1	0	0	1	0	24	-
e3	1	-1	2	0	0	1	12	6
z	**-2**	**-1**	**-3**	**0**	**0**	**0**	**0**	

	x1	**x2**	**x3**	**e1**	**e2**	**e3**	**b**	
x3	-1	2	1	1	0	0	6	
e2	1	1	0	0	1	0	24	24
e3	3	-5	0	-2	0	1	0	0
z	**-5**	**5**	**0**	**3**	**0**	**0**	**18**	

	x1	**x2**	**x3**	**e1**	**e2**	**e3**	**b**	
x3	0	1/3	1	1/3	0	1/3	6	18
e2	0	8/3	0	2/3	1	- 1/3	24	9
x1	1	-5/3	0	- 2/3	0	1/3	0	
z	**0**	**-10/3**	**0**	**- 1/3**	**0**	**5/3**	**18**	

	x1	**x2**	**x3**	**e1**	**e2**	**e3**	**b**	
x3	0	0	1	1/4	- 1/8	3/8	3	
x2	0	1	0	1/4	3/8	- 1/8	9	
x1	1	0	0	- 1/4	5/8	1/8	15	
z	**0**	**0**	**0**	**1/2**	**5/4**	**5/4**	**48**	