TD N° 0 – Eléments de l'algèbre linéaire

Exercice 1 : Ecrire sous forme matricielle les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_3 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ x_1 \geq 2 \end{cases}$$

Exercice 2 : inversion d'une matrice par la méthode de Gauss- Jordan

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

__Questions :__

1) Calculer det(A), et déduire que A est inversible
2) Utiliser le principe de la méthode de Gauss pour calculer l'inverse de A
3) Résoudre le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

__Rappel :__

Calcul du déterminent : la matrice carrée A est inversible ssi det(A) est non nul

__Cas 1 :__ matrice d'ordre 2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

__Cas 2 :__ matrice d'ordre 3

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{m} a_{i1}.(-1)^{i+j}.\text{mineur}_{i1}(A) = \sum_{i=1}^{m} a_{i1}.\text{cofacteur}_{i1}(A)$$

$$= a.(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} & \cancel{c} \\ \cancel{d} & e & f \\ \cancel{g} & h & i \end{vmatrix} + d.(-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} \cancel{a} & b & c \\ \cancel{d} & \cancel{e} & \cancel{f} \\ \cancel{g} & h & i \end{vmatrix} + g.(-1)^{3+1}.\begin{vmatrix} \cancel{a} & b & c \\ \cancel{d} & e & f \\ \cancel{g} & \cancel{h} & \cancel{i} \end{vmatrix}$$

Principe de l'algorithme de Gauss-Jordan

a) Considérer la matrice $[A \mid I_n]$ d'ordre $n \times 2n$

b) Trouver les transformations linéaires nécessaires sur cette matrice pour transformer à gauche A en I_n. Dans ce cas, à droite, I_n est transformée en A^{-1}

Exercice 3 : On souhaite résoudre le système linéaire suivant :

$Ax = b$ où

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \text{ et } b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) Trouver une solution x de ce système dans laquelle $x_4 = x_5 = 0$

b) Trouver une solution x de ce système dans laquelle $x_4 = 2$ et $x_5 = 1$

c) Combien de solution ce système admet à votre avis ?

Indication :

Décomposer A et x de la manière suivante : $A = [A_B \mid A_H]$ et $x = \begin{bmatrix} x_B \\ \hline x_H \end{bmatrix}$ avec :

- La matrice $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ et la matrice $A_H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$
- Le vecteur $x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ et le vecteur $x_H = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$

L'indice B est la première du mot « base », cette appellation est due au fait que la sous-matrice qui est associée à cet indice est une partie importante de la matrice A car elle est carrée inversible.