

TD N° 1 – Modélisation et programmation linéaire

Exercice 1 :

Un carrossier industriel prépare des « fourgons » et des « plateaux ». Il dispose de quatre ateliers: mécanique, tôlerie, sellerie et peinture. Chaque atelier fonctionne 60 heures par semaine.

La préparation d'un fourgon nécessite :
5 heures de mécanique ;
12 heures de tôlerie ;
10 heures de peinture.

La préparation d'un plateau nécessite :
10 heures de mécanique ;
12 heures de sellerie ;
5 heures de peinture.

Le marché n'est pas saturé. Chaque véhicule offre un bénéfice de 1000 euros. Le carrossier cherche à maximiser son bénéfice. Formaliser ce problème en programmation linéaire sous la forme canonique.

Remarque: un PL est dit sous la forme canonique s'il vérifie les trois conditions suivantes: une fonction objectif à maximiser, des contraintes selon des relations d'infériorité et des variables de décision toutes positives ou nulles.

Exercice 2 :

Mettre le programme linéaire suivant sous la forme canonique, ensuite sous une forme matricielle dans laquelle vous identifiez ses différents éléments:

$$(P_1) \begin{cases} \text{Min} & z = 2x_1 - x_2 - 3x_3 \\ \text{s.c.} & -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6 \\ & x_1 - x_2 + x_3 \geq 9 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 3 :

Une pâtisserie industrielle possède deux sites de fabrication à Quimper et Vannes (deux villes en France). Elle expédie sa production vers Rouen, Paris et Bordeaux. La capacité maximale de production de chaque site est :

- Quimper : 350 caisses/semaine ;
- Vannes : 650 caisses/semaine.

La demande à satisfaire à chaque destination est 300 caisses/semaine. Le coût de transport unitaire est résumé dans le tableau suivant :

	Paris	Rouen	Bordeaux
Quimper	22	17	18
Vannes	24	18	14

Formuler ce problème d'optimisation.

Exercice 3 :

La compagnie de conseil TRUSCO a la tâche de préparer un plan d'investissement pour un organisme financier. On a retenu 4 possibilités d'investissements réparties dans l'industrie du pétrole, de l'électronique et pharmaceutique. Les sociétés dans lesquelles on désire investir et les bénéfices estimés sont présentés dans le tableau ci-après :

Société	Secteur d'activité	Bénéfice estimé pour un 1 € investi
1 Simco	Pétrole	9,4 €
2 Microtel	Electronique	10,9 €
3 CAX	Electronique	7,8 €
4 Biomed	Pharmaceutique	9,6 €

Les directives (contraintes) suivantes ont été émises par la direction de l'organisme :

- Les fonds disponibles pour investissement représentent un montant total de 500 milles €
- Aucun secteur d'activité ne devrait se voir allouer plus de 50% des fonds disponibles.
- Bien que la société Microtel présente un bénéfice théorique élevé, on veut limiter le montant investi dans cette société, à cause de son risque, à 60% des investissements dans le secteur électronique.
- On a demandé à TRUSCO d'investir au moins 100 milles € dans l'industrie pétrolière.

Aidez l'analyste financier de la compagnie de TRUSCO à formuler ce problème pour suggérer un plan de placement qui respecte les directives mentionnées et qui permet de maximiser le bénéfice (soit X_i le montant à investir pour la société i).

Exercice 5 :

Une raffinerie doit fournir chaque jour deux types A et B d'essence à partir des constituants 1, 2 et 3. On dispose des données suivantes, avec la quantité maximale disponible quotidiennement du constituant i notée Q_i et de son coût unitaire C_i , d'un ensemble de spécifications techniques de composition et des prix unitaires de vente P_j .

Constituant i	Q_i	C_i	Essence j	Spécification	P_j
1	3 000	3	A	$\leq 30\%$ de 1	5,5
2	2 000	6		$\geq 40\%$ de 2	
3	4 000	4		$\leq 50\%$ de 3	
			B	$\leq 50\%$ de 1	4,5
				$\geq 10\%$ de 2	

Donner un modèle permettant de déterminer la composition des mélanges et les quantités à produire pour maximiser le bénéfice.

Exercice 6 (pour les expérimentés seulement):

Une usine produit des barres d'aciers de longueur 20 cm. Elle a reçu une commande de barreaux de différentes longueurs. Cette commande se présente comme suit:

Barreaux j	A	B	C
Longueur L_j (cm)	9	7	5
Nombre N_j (u)	300	200	150

Pour satisfaire cette commande, le directeur de l'usine décide le découpage des barres de longueur 20 cm en barreaux de longueur 5 cm, 7 cm et 9 cm. Le directeur veut minimiser le total des chutes, c'est-à-dire la longueur totale inutilisable, tout en satisfaisant les demandes. Les barreaux découpés en excédent (par rapport la demande) comptent aussi comme des chutes.

TAF: Formuler ce problème sous forme d'un programme linéaire.

Indication: soit X_i le nombre de barres à découper de la manière (patron de découpe) i .

Liste des patrons possibles retenus :

Patron i	9cm	7cm	5cm	Chute (cm)
1	2	0	0	2
2	1	1	0	4
3	1	0	2	1
4	0	2	1	1
5	0	1	2	3
6	0	0	4	0

Soient a_{ij} le nombre de barreaux j obtenues par le patron i , et c_i la chute donnée par le patron i .