TD N° 2 – Programmation linéaire (Reformulation)

Exercice 1 :

Mettre les programmes linéaires des exercices 1, 2 et 3 du TD1 sous forme standard.

Exercice 2 :

a) Mettre le programme linéaire suivant sous forme canonique ensuite sous forme standard.

$$(P_1)\begin{cases} Max \quad z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ s.c. \quad x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \quad (I) \\ \quad 2x_1 - x_2 - 5x_3 \le 2 \quad (II) \\ \quad x_1 + 3x_2 - x_3 \ge 1 \quad (III) \\ \quad x_1, x_2 \ge 0,\ x_3 \in IR \quad (IV) \end{cases}$$

b) Reformuler (P_1) en diminuant le nombre de ses variables (présence d'une variable redondante).

Exercice 3 :

Considérons le problème suivant :

$$(P_2)\begin{cases} Max \quad z = -2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 \\ s.c. \\ -2x_3 - x_4 + x_5 = 4 \quad (I) \\ -x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 8 \quad (II) \\ x_1 + x_3 + x_4 = 6 \quad (III) \\ x_j \ge 0, \quad \forall j \end{cases}$$

a) Mettre ce programme linéaire sous forme canonique avec seulement deux variables de décision.
b) Représenter graphiquement le domaine des solutions réalisables en considérant les deux variables restantes.

Exercice 4 :

a) Montrer graphiquement que le problème suivant comporte une contrainte redondante :

$$(P_3)\begin{cases} Max \quad z = x_1 + x_2 \\ s.c. \\ -3x_1 + 2x_2 \le 4 \quad (I) \\ 3x_1 + 2x_2 \le 16 \quad (II) \\ x_1 \le 3 \quad (III) \\ x_1 + 4x_2 \le 22 \quad (IV) \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

L'élimination de cette contrainte n'affecte pas le domaine réalisable.

b) Montrer analytiquement la présence de cette contrainte redondante

Exercice 5 (modélisation d'un problème de dépollution):

Une rivière dont le débit est 10000m^3/jour contient trois polluants 1, 2 et 3. Les paramètres p_1, p_2 et p_3 de valeurs connues désignent les quantités (en kg/m^3) des polluants 1, 2 et 3 que contient la rivière, c'est-à-dire x m^3 d'eau de rivière contient $(x.p_1)$ de polluant 1, $(x.p_2)$ de polluant 2 et $(x.p_3)$ de polluant 3. On peut utiliser, pour la dépollution, trois traitements T_1, T_2 et T_3, et dont l'efficacité et le coût sont donnés par le tableau suivant :

Polluants	Traitements		
	T_1	T_2	T_3
1	0,6	0,1	0,07
2	0,7	0,12	0,1
3	0,9	0,5	0,5
Coût (euros/1000 m^3)	300	1100	18000

Ce tableau s'interprète de la manière suivante : si à titre d'exemple x m^3 sont traités par le traitement T2, ces x m^3 contiendront, après traitement, $(0{,}1x.p_1)$ de polluant 1, $(0{,}12x.p_2)$ de polluant 2 et $(0{,}5x.p_3)$ de polluant 3. Le coût de ce traitement sera $(1100.x/1000)$ euros. On peut traiter n'importe quelle quantité du flux par chacun des traitements. On désire que le niveau de pollution de la rivière ne dépasse pas les seuils a, b et c de valeurs connues exprimées en (kg/m^3) respectivement pour chacun des polluants 1, 2 et 3.

Exprimer sous forme de programme linéaire le problème consistant à déterminer quelles quantités d'eau (sur le débit total) doit-on traiter quotidiennement par chacun des traitements ?

NB : Les paramètres p1, p2, p3, a, b, c sont des donnés de valeurs connues.

Exercice 6:

Reformuler le problème suivant en utilisant seulement les deux variables x_1 et x_2 :

$$(P_4)\begin{cases} Max \quad z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ s.c. \quad x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \quad (I) \\ \quad 2x_1 - x_2 - 5x_3 + x_4 \leq 8 \qquad (II) \\ \quad x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \qquad (III) \\ \quad x_1, x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0 \qquad (IV) \end{cases}$$