TD N° 3 – Méthode graphique

Exercice 1:

Résoudre graphiquement ce programme linéaire :

$$\begin{array}{lll} Max & z = 3x_1 + 2x_2 & \\ S.c. & x_1 + 2x_2 \le 7 & (I) \\ & 2x_1 + x_2 \le 8 & (II) \\ & x_1 - x_2 \ge -2 & (III) \\ & 2x_1 - 5x_2 \le 5 & (IV) \\ x_1, x_2 \ge 0 \quad (V) & & \end{array}$$

Le graphe doit être accompagné par les éléments suivants :

- les équations des droites d'isovaleurs Δ_i relatives aux contraintes (i), avec deux points de chaque droite pour aider la construction.
- précision de la position des demi-plans réalisables D_i par rapport aux droites respectives Δ_i.
- le domaine réalisable (à hachurer sur le graphe en bien explicitant ses frontières).
- le vecteur gradient $\overrightarrow{OG}$ de la fonction objectif. Cette dernière constitue l'équation de la droite paramétrique $\Delta_{(z)}$.
- montrer sur le graphe les droites de la fonction objectif $\Delta_{(0)}$ qui passe par l'origine et $\Delta_{(z^*)}$ qui passe par l'éventuel point optimal M*(x_1^* , x_2^*) (ou les points optima).

Exercice 2:

Montrer graphiquement que le problème suivant n'a pas d'optimum fini.

$$\begin{array}{lll} Max & z = x_1 + x_2 & \\ S.c. & -x_1 + x_2 \le 1 & (I) \\ & -\frac{1}{2}x_1 + x_2 \le \frac{3}{2} & (II) \\ & x_1, x_2 \ge 0 & (III) \end{array}$$

Exercice 3:

a) Montrer graphiquement que le problème ci-dessous admet une infinité de solutions optimales.

$$\begin{array}{lll} Max & z = 6x_1 + 4x_2 & \\ S.c. & -3x_1 + 2x_2 \le 4 & (I) \\ & 3x_1 + 2x_2 \le 16 & (II) \\ & x_1 \le 3 & (III) \\ & x_1, x_2 \ge 0 & (IV) \end{array}$$

b) «L'existence d'une contrainte dont la droite d'isovaleurs est parallèle à la droite de la fonction objectif» est une condition nécessaire de la présence d'une infinité de solutions optimales du problème. On souhaite vérifier s'il s'agit aussi d'une condition suffisante?

   Résoudre graphiquement le même problème dans lequel la deuxième contrainte devient $3x_1 + 2x_2 \geq 16 \quad (II)$ et remarquer la présence d'une solution optimale unique. Justifier cela par la particularité de la position de la droite d'isovaleurs parallèle à la fonction objectif par rapport à l'origine et le reste du domaine réalisable.

Exercice 4:

a) Reprendre l'exercice 1 du TD1. Résoudre graphiquement ce problème.
b) Quelle est la signification des variables d'écart qui apparaissent dans la forme standard du modèle?
c) On suppose que le bénéfice offert par un fourgon varie de 0 euro et 1000 euros. Etudier l'influence de cette variation sur la solution.

Exercice 5:

On considère le programme linéaire (P) suivant :

$$\begin{aligned}
&Max\ z = 9x_1 + 2x_2 \\
&S.c.\ 3x_1 + x_2 \leq 13 \quad (I) \\
&\quad x_1 + x_2 \geq 5 \quad (II) \\
&\quad -x_1 + 2x_2 \leq 5 \quad (III) \\
&\quad x_2 \geq 2 \quad (IV) \\
&\quad x_1, x_2 \geq 0 \quad (V)
\end{aligned}$$

a) Ecrire ce problème sous la forme standard et sous la forme canonique.
b) Résoudre graphiquement ce programme linéaire.
c) Quelle est la contrainte dont l'omission rend ce programme linéaire non borné ?
d) Supposons que la fonction objectif est exprimée par $z = c_1x_1 + 2x_2$. Quelles sont toutes les valeurs possibles que peut prendre c_1 pour que ce programme admette des solutions multiples ?
e) Hachurer avec une autre couleur le nouveau domaine réalisable si on remplace la $3^{ième}$ contrainte de (P) par $-x_1 + 2x_2 \geq 5$ et indiquer la présence d'une contrainte redondante dans ce cas.