R. Mellouli, H. Maalla Frikha, M. Eddaly

TD N° 4 – Méthode du simplexe (primal)

Exercice 1.

Résoudre les problèmes suivants par la méthode du simplexe

$a)$

$$\begin{array}{ll} Max & z = x_1 + 2x_2 \\ S.c. & 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$b)$

$$\begin{array}{ll} Max & z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ S.c. & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 7 \\ & 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11 \\ & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

$c)$

$$\begin{array}{ll} Max & z = x_1 + 2x_2 \\ S.c. & x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 12 \\ & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Exercice 2.

On considère le programme linéaire suivant:

$$Max\ z = 30\,x_1 + 20x_2$$

$$S.c. \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leq 400 & (I) \\ x_1 \leq 60 & (II) \\ x_2 \leq 75 & (III) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

a) Résoudre le problème graphiquement.

b) Sur base de a), déterminez la base optimale B^* et calculer directement le dernier tableau du simplexe.

On rappelle que le tableau simplexe pour une base B (impliquant une solution de base $x^T = \langle x_B^T \mid x_L^T \rangle$ où $x_L^T = 0^T$) a la forme suivante :

	x_L^T	x_B^T	b
x_B	$A_B^{-1}A_L$	I	$A_B^{-1}b$
z	$c_B^T A_B^{-1} A_L - c_L^T$	0^T	$c_B^T A_B^{-1} b$

c) Résoudre le problème par la méthode simplexe.

- Suivre le parcours des solutions visitées par la méthode du simplexe sur le graphe en explicitant les points correspondants ainsi que leurs coordonnées.
- Comparer le dernier tableau avec celui calculé précédemment.

Exercice 3.

On considère le programme linéaire de l'exercice 1 du TD3. Ce problème avait été résolu par la méthode graphique.

- Résoudre le problème avec la méthode du simplexe (primal).
- Suivre le parcours des solutions visitées par la méthode du Simplexe sur le graphe.

$$
\begin{array}{lll}
Max & z = 3x_1 + 2x_2 & \\
S.c. & x_1 + 2x_2 \le 7 & (I) \\
 & 2x_1 + x_2 \le 8 & (II) \\
 & x_1 - x_2 \ge -2 & (III) \\
 & 2x_1 - 5x_2 \le 5 & (IV) \\
\multicolumn{2}{l}{x_1, x_2 \ge 0} & (V)
\end{array}
$$

Exercice 4.

Résoudre le problème suivant par simple inspection (fixation de certaines variables en examinant leur contribution dans la fonction objectif), puis par la méthode du simplexe

$$Max\ z = 4\,x_1 - 6\,x_2 + 8\,x_3 - 5\,x_4 + 12\,x_5$$

$$S.c. \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 3x_5 \le 90 \\ x_j \ge 0 \end{cases}$$

Exercice 5.

Appliquer la méthode du simplexe sur les problèmes suivants et montrer que le ces derniers n'admettent pas d'optima fini (problèmes non bornés).

$a)$

$$
\begin{array}{ll}
Max & z = x_1 + x_2 \\
S.c. & -x_1 + x_2 \le 1 \\
 & -x_1 + 2x_2 \le 3 \\
 & x_1, x_2 \ge 0
\end{array}
$$

$b)$

$$
\begin{array}{ll}
Max & z = x_1 + x_2 \\
s.c. & 2x_1 - x_2 \le 10 \\
 & x_1 \le 7 \\
 & x_1, x_2 \ge 0
\end{array}
$$

Exercice 6.

On considère le programme linéaire de l'exercice 3 du TD3:

$$
\begin{array}{lll}
Max & z = 6x_1 + 4x_2 & \\
S.c. & -3x_1 + 2x_2 \le 4 & (I) \\
 & 3x_1 + 2x_2 \le 16 & (II) \\
 & x_1 \le 3 & (III) \\
 & x_1, x_2 \ge 0 & (IV)
\end{array}
$$

Résoudre le problème en appliquant la méthode du simplexe montrant la présence d'une infinité de solutions.

Exercice 7.

En utilisant la notion de dégénérescence, montrer que le problème suivant comporte une contrainte redondante (la dernière).

$$
\begin{array}{lll}
Max & z = x_1 + x_2 & \\
S.c. & -3x_1 + 2x_2 \le 4 & (I) \\
 & 3x_1 + 2x_2 \le 16 & (II) \\
 & x_1 \le 3 & (III) \\
 & x_1 + 4x_2 \le 22 & (IV) \\
\multicolumn{2}{l}{x_1, x_2 \ge 0} & (V)
\end{array}
$$

Pour la correction

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Maximiser } z = \mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} \\ \text{sous les contraintes} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{rcrcrcl} z(\max) & - & \mathbf{c}_{\mathcal{B}}^T\mathbf{x}_{\mathcal{B}} & - & \mathbf{c}_{\mathcal{L}}^T\mathbf{x}_{\mathcal{L}} & = & 0 \\ & & \mathbf{A}_{\mathcal{B}}\mathbf{x}_{\mathcal{B}} & + & \mathbf{A}_{\mathcal{L}}\mathbf{x}_{\mathcal{L}} & = & \mathbf{b}\end{array}\right.}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{rcrcrcl} z(\max) & + & \mathbf{0}^T\mathbf{x}_{\mathcal{B}} & + & (\mathbf{c}_{\mathcal{B}}^T\mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}\mathbf{A}_{\mathcal{L}} - \mathbf{c}_{\mathcal{L}}^T)\mathbf{x}_{\mathcal{L}} & = & \mathbf{c}_{\mathcal{B}}^T\mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}\mathbf{b} \\ & & \mathbf{x}_{\mathcal{B}} & + & \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}\mathbf{A}_{\mathcal{L}}\mathbf{x}_{\mathcal{L}} & = & \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}\mathbf{b}\end{array}\right.}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{c}_{\mathcal{B}}^T\mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}\mathbf{A}_{\mathcal{L}} - \mathbf{c}_{\mathcal{L}}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}\mathbf{A}_{\mathcal{L}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} z(\max) \\ \mathbf{x}_{\mathcal{B}} \\ \mathbf{x}_{\mathcal{L}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{c}_{\mathcal{B}}^T\mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}\mathbf{b}\end{bmatrix}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \widehat{\mathbf{A}}\,\widehat{\mathbf{x}} = \widehat{\mathbf{b}}$$

Tableaux simplexe :

	$\mathbf{x}_{\mathcal{L}}^T$	$\mathbf{x}_{\mathcal{B}}^T$	$\widehat{\mathbf{b}}$
$\mathbf{x}_{\mathcal{B}}$	$\mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}\mathbf{A}_{\mathcal{L}}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}\mathbf{b}$
z	$\mathbf{c}_{\mathcal{B}}^T\mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}\mathbf{A}_{\mathcal{L}} - \mathbf{c}_{\mathcal{L}}^T$	0^T	$\mathbf{c}_{\mathcal{B}}^T\mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}\mathbf{b}$

Cas particulier: $b \geq 0$
Solution de base réalisable initiale : $x_B = e$
(e : vecteur des variables d'écart dans la forme standard):

	$\mathbf{x}_{\mathcal{L}}^T$	$\mathbf{x}_{\mathcal{B}}^T$	$\widehat{\mathbf{b}}$
$\mathbf{x}_{\mathcal{B}}$	$\mathbf{A}_{\mathcal{L}}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{b}$
z	$-\mathbf{c}_{\mathcal{L}}^T$	0^T	0

En effet, dans A une sous-matrice identité apparait (relative aux variables d'écart).

➔ $A_B = Id_m = A_B^{-1}$ et $c_B^T = 0^T$.

Exercice. La modélisation du problème de l'exercice 1 du TD1 est la suivante :

Maximiser $z = x_1 + x_2$

sous les contraintes suivantes :

$$5x_1 + 10x_2 \leq 60$$
$$12x_1 \leq 60$$
$$12x_2 \leq 60$$
$$10x_1 + 5x_2 \leq 60$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Après ajout des variables d'écart $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_4}$ (vecteur **e**) au modèle pour l'écrire sous la forme standard et étant donné que le vecteur $b \geq 0$, on a une SBR (solution de base réalisable) initiale donnée par $\boldsymbol{x_B} = \boldsymbol{e} = \boldsymbol{b}$ et

$$\boldsymbol{x_L} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Tableaux simplexes :

	#1	x_1 (j*)	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	b_i	b_i / a_{ij^*}	
L1	e_1	5	10	1	0	0	0	60	60/5=12	
L2	e_2	12	0	0	1	0	0	60	60/12=5	i*
L3	e_3	0	12	0	0	1	0	60	-	
L4	e_4	10	5	0	0	0	1	60	60/10=6	
Lz	z	-1	-1	0	0	0	0	0		

SBR non optimale (ligne z non ≥ 0)

$\boldsymbol{x_1}$ entre en base et $\boldsymbol{e_2}$ sort de la base (selon 1[er] et 2[ème] critère de Dantzig).

Opération de pivot : $Li^* \leftarrow Li^* / \boldsymbol{a_{i^*j^*}}$ et $\forall i \neq i^*$, $Li \leftarrow Li - \boldsymbol{a_{ij^*}} \times Li^*$

SBR non optimale (ligne z non ≥ 0)

$\boldsymbol{x_1}$ entre en base et $\boldsymbol{e_2}$ sort de la base (selon 1[er] et 2[ème] critère de Dantzig).

Opération de pivot : $Li^* \leftarrow Li^* / \boldsymbol{a_{i^*j^*}}$ et $\forall i \neq i^*$, $Li \leftarrow Li - \boldsymbol{a_{ij^*}} \times Li^*$

	#2	x_1	x_2 (j*)	e_1	e_2	e_3	e_4	b_i	b_i / a_{ij^*}	
L1	e_1	0	10	1	-5/12	0	0	35	3,5	
L2	x_1	1	0	0	1/12	0	0	5	-	
L3	e_3	0	12	0	0	1	0	60	5	
L4	e_4	0	5	0	-5/6	0	1	10	2	i*
Lz	z	0	-1	0	1/12	0	0	5		

SBR non optimale (ligne z non ≥ 0)

$\boldsymbol{x_2}$ entre en base et $\boldsymbol{e_4}$ sort de la base $\Rightarrow$ Pivot : L4 $\leftarrow$ L4 / 5;

$L1 \leftarrow L1 - 10.\ L4,\ L3 \leftarrow L3 - 12.\ L4,\ Lz \leftarrow Lz + L4,$

	#3	x_1	x_2	e_1	e_2 (j*)	e_3	e_4	b_i	b_i / a_{ij^*}	
L1	e_1	0	0	1	5/4	0	-2	15	12	i*
L2	x_1	1	0	0	1/12	0	0	5	60	
L3	e_3	0	0	0	2	1	-12/5	36	18	
L4	x_2	0	1	0	-1/6	0	1/5	2	-	
Lz	z	0	0	0	-1/12	0	1/5	7		

SBR non optimale (ligne z non ≥ 0)

e_2 entre en base et e_1 sort de la base $\Rightarrow$ Pivot : $L1 \leftarrow L1 / (5/4)$;

$L2 \leftarrow L2 - 1/12.\ L1,\ L3 \leftarrow L3 - 2.\ L1,\ L4 \leftarrow L4 + 1/6.\ L1,\ Lz \leftarrow Lz + 1/12\ L1,$

	#4	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	b_i
L1	e_1	0	0	4/5	1	0	-8/5	12
L2	x_1	1	0	-1/15	0	0	2/15	4
L3	e_3	0	0	-8/5	0	1	4/5	12
L4	x_2	0	1	2/15	0	0	-1/15	4
Lz	z	0	0	1/15	0	0	1/15	8

SBR optimale (ligne z ≥ 0)

$$x_B = \begin{bmatrix} e_1 \\ x_1 \\ e_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{12} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{12} \\ \mathbf{4} \end{bmatrix}, \quad x_L = \begin{bmatrix} e_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{et} \quad z^* = \mathbf{8}$$